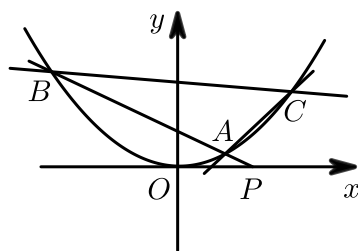


第3讲二次函数与定值问题

一、恒过定点

典题精练

1. 如图，抛物线解析式： $y = \frac{1}{4}x^2$ ，过点 $P(2, 0)$ 的直线交抛物线于 A 、 B 两点，过点 A 的直线 $y = x + b$ 交抛物线于另一点 C ，判断直线 BC 是否经过定点？若过定点，求出该点的坐标，若不过定点，请说明理由。



经典再现

2. 在平面直角坐标系中，点 $O(0, 0)$ ，点 $A(1, 0)$ ，已知抛物线 $y = x^2 + mx - 2m$ ，（ m 是常数），顶点为 P 。
- (1) 当抛物线经过点 A 时，求顶点 P 的坐标。
 - (2) 若点 P 在 x 轴下方，当 $\angle AOP = 45^\circ$ 时，求抛物线的解析式。
 - (3) 无论 m 取何值，该抛物线都经过定点 H ，当 $\angle AHP = 45^\circ$ 时，求抛物线的解析式。

二、单线段定值

典题精练

3. 如图，已知抛物线 $y = -x^2 + mx + m - 2$ 的顶点为 A ，且经过点 $B(3, -3)$ 。

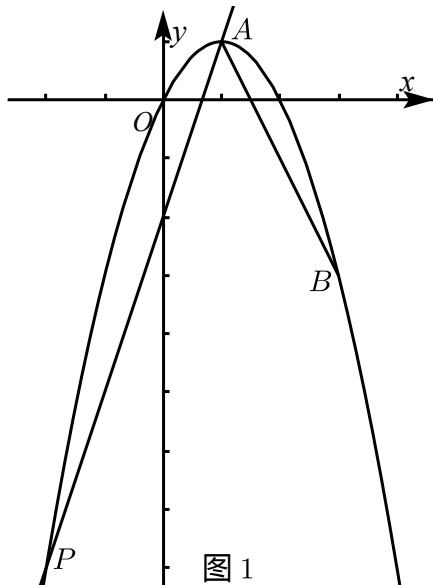


图 1

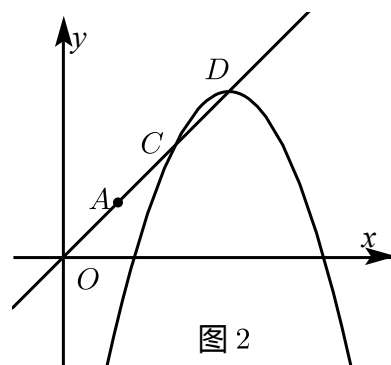


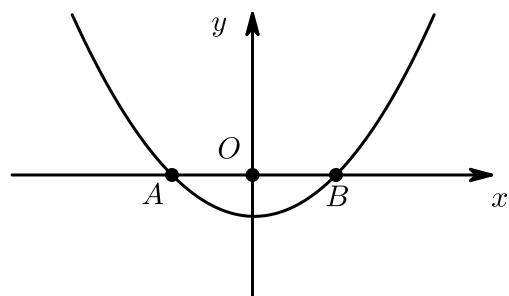
图 2

- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 在对称轴左侧的抛物线上存在一点 P ，使得 $\angle PAB = 45^\circ$ ，求点 P 坐标。
- (3) 如图2，将原抛物线沿射线 OA 方向进行平移得到新的抛物线，新抛物线与射线 OA 交于 C 、 D 两点，请问：在抛物线平移的过程中，线段 CD 的长度是否为定值？若是，请求出这个定值；若不是，请说明理由。

三、 线段和差定值

典题精练

4. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点（ A 在 B 的左侧），点 P 是抛物线上一动点（不包括 A 、 B ）， $PM \perp x$ 轴于点 M ，点 P 的横坐标为 t ．



- (1) 若 $-1 < t < 1$ ，求证： $OP + PM$ 为定值，并求出该值．
(2) 若 $t < -1$ 或 $t > 1$ ，求证： $OP - PM$ 为定值，并求出该值．

5. 抛物线 $y = ax^2 + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，顶点为 C ，点 P 在抛物线上，且位于 x 轴下方。

(1) 如图1，若 $P(1, -3)$ 、 $B(4, 0)$ ，

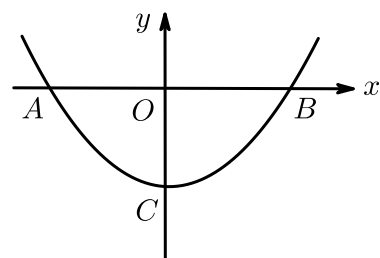


图 1

① 求该抛物线的解析式；

② 若 D 是抛物线上一点，满足 $\angle DPO = \angle POB$ ，求点 D 的坐标；

(2) 如图2，在 (1) 中的抛物线解析式不变的条件下，已知直线 PA 、 PB 与 y 轴分别交于 E 、 F 两点，点 P 运动时， $OE + OF$ 是否为定值？若是，试求出该定值；若不是，请说明理由。

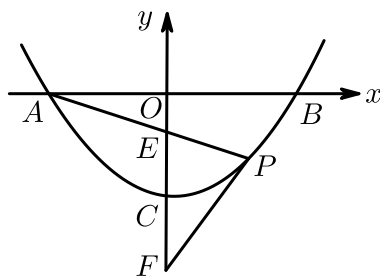
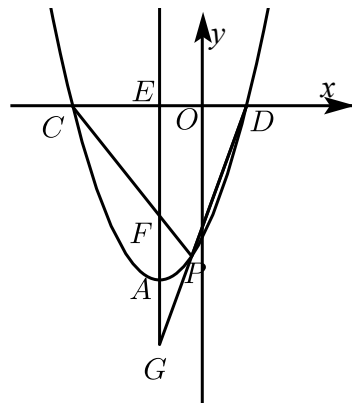


图 2

6. 已知，在以 O 为原点的直角坐标系中，抛物线的顶点为 $A(-1, -4)$ ，且经过点 $B(-2, -3)$ ，与 x 轴分别交于 C 、 D 两点．

(1) 直线 OB 以及该抛物线相应的函数表达式分别是 _____ ， _____ ．

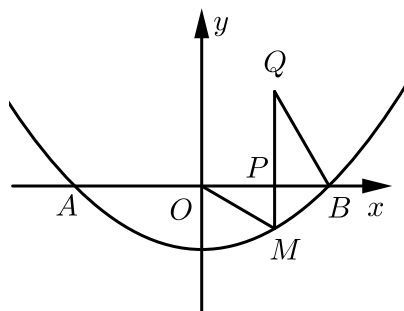
(2) 如图，过点 A 的直线交 x 轴于点 E ，且 $AE \parallel y$ 轴，点 P 是抛物线上 A 、 D 之间的一个动点，直线 PC 、 PD 与 AE 分别交于 F 、 G 两点．当点 P 运动时， $EF + EG$ 是否为定值？若是，试求出该定值；若不是，请说明理由．



四、周长、面积定值

典题精练

7. 已知二次函数 $y = ax^2 + c$ ($a > 0$, $c < 0$)，与 x 轴交于 A 、 B 两点， P 是线段 OB (不含端点) 上任意一点， $PM \perp x$ 轴交抛物线于点 M ， $\angle OBQ = \angle OMP$ ， BQ 交直线 PM 于点 Q ，问当 a 、 c 有何数量关系时 (只写一种情况即可)， $\triangle PBQ$ 的周长为定值，并求出该值 (用 a 表示) ．

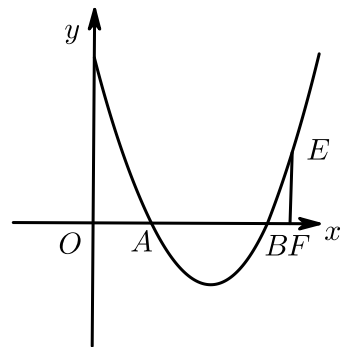


8. 已知抛物线 $y = x^2 - 2mx + 4m - 8$ 的顶点为 A .
- (1) 求证：该抛物线与 x 轴总有两个交点 .
- (2) 当 $m = 1$ 时，直线 $BC : y = kx - 2$ 与该抛物线交于 B 、 C 两点，若线段 BC 被 x 轴平分，求 k 的值 .
- (3) 以 A 为一个顶点作该抛物线的内接正三角形 AMN (M 、 N 两点在抛物线上)，请问：
 $\triangle AMN$ 的面积是与 m 无关的定值吗？若是，请求出这个定值；若不是，请说明理由 .

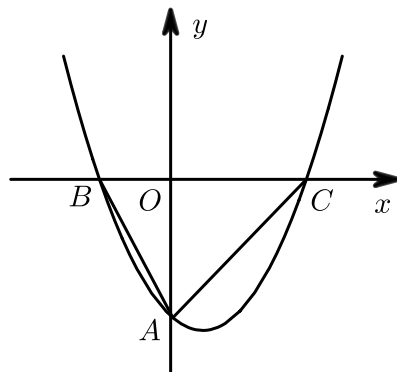
五、比例定值

典题精练1

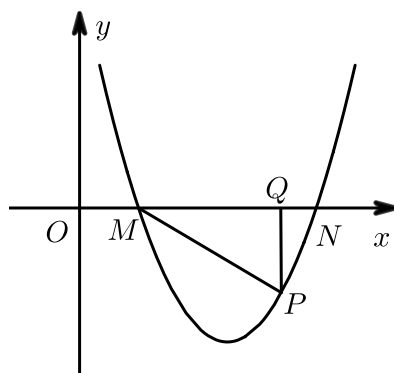
9. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (A 在 B 左)，点 E 为抛物线上一动点，作 $EF \perp x$ 轴于 F ，试证明： $\frac{EF}{AF \cdot BF}$ 的值是一个定值 .



10. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $A(0, -4)$ ，与 x 轴相交于 $B(-2, 0)$ 、 $C(4, 0)$ 两点， O 为坐标原点。

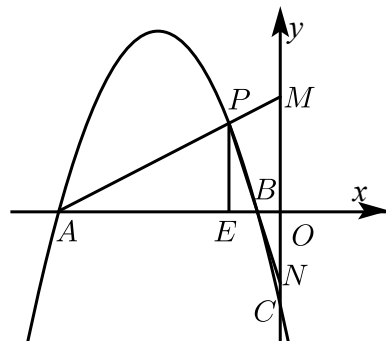


- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 如图，将抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 向右平移 $n(n > 0)$ 个单位得到的新抛物线与 x 轴交于 M 、 N (M 在 N 左侧)， P 为 x 轴下方的新抛物线上任意一点，连 PM 、 PN ，过 P 作 $PQ \perp MN$ 于 Q ， $\frac{PQ}{MQ} + \frac{PQ}{NQ}$ 是否为定值？请说明理由。



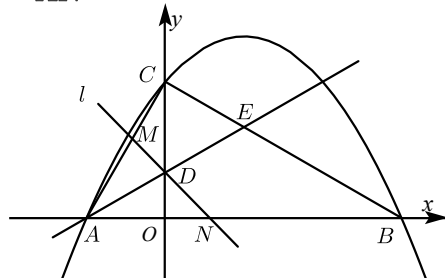
典题精练2

11. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 与 y 轴负半轴交于 C ，与 x 轴负半轴交于 A 、 B 两点， M 是 y 轴正半轴上一点，连 AM 交抛物线于 P ，过 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E ，连 PB 并延长交 y 轴于 N ， $\frac{OM \cdot ON}{PE \cdot OC}$ 的值是否为定值。

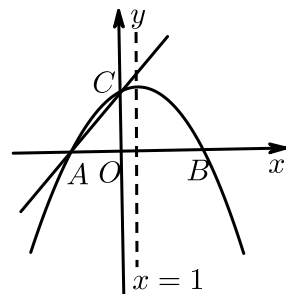


 典题精练3

12. 已知：如图，抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}x + 3$ 与坐标轴交于 A, B, C 三点，点 A 在点 B 左侧，点 C 为抛物线与 y 轴的交点， $\angle BAC$ 的平分线 AE 交 y 轴于点 D ，交 BC 于点 E ，过点 D 的直线 l 与射线 AC ， AB 分别交于点 M, N ．证明：当直线 l 绕点 D 旋转时， $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$ 均为定值，并求出该定值．



13. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = \frac{5}{4}x + m$ (m 为常数) 的图象与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ ，与 y 轴交于点 C 。以直线 $x = 1$ 为对称轴的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数，且 $a \neq 0$) 经过 A, C 两点，并与 x 轴的正半轴交于点 B 。



- (1) 求 m 的值及抛物线的函数表达式。
- (2) 若 P 是抛物线对称轴上使 $\triangle ACP$ 的周长取得最小值的点，过点 P 任意作一条与 y 轴不平行的直线交抛物线于 $M_1(x_1, y_1)$ ， $M_2(x_2, y_2)$ 两点，试探究 $\frac{M_1P \cdot M_2P}{M_1M_2}$ 是否为定值，并写出探究过程。

 典题精练4

14. 已知点 $A(1, \frac{1}{2})$ 在抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$, 点 $F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 在它的对称轴上, 点 P 为抛物线上一动点.

- (1) 求这条抛物线的函数解析式.
- (2) 判断是否存在直线 l , 使得线段 PF 的长总是等于点 P 到直线 l 的距离, 需说明理由.
- (3) 设直线 PF 与抛物线的另一交点为 Q , 探究: PF 和 QF 这两条线段的倒数和是否为定值? 证明你的结论.